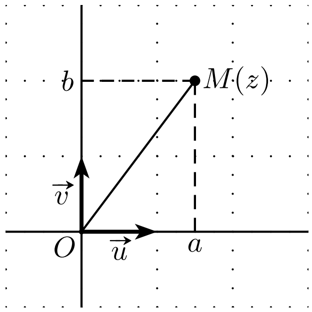
1 Module d'un nombre complexe

<u>Définition</u>
Soit z un nombre complexe avec $z = a + ib$ où a et b sont réels.
Le module de z est le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$. Donc on a : $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$.

<u>Interprétation géométrique de $|z|$.</u>



Le repère du plan complexe est (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
M est d'affixe z. On a donc d'après le théorème de Pythagore :
$OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc

$|\mathbf{z}| = \mathbf{OM}$ où O est l'origine du repère.

<u>Exemple :</u>

$$|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

<u>Distance entre deux points ou longueur d'un segment.</u>
La longueur du segment $[AB]$ où A et B sont d'affixes z_A et z_B vaut :

$$\mathbf{AB} = |\mathbf{z_B} - \mathbf{z_A}| = |\mathbf{z_A} - \mathbf{z_B}|.$$

<u>Preuve :</u>
A et B sont d'affixes z_A et z_B avec $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ et x_A, y_A,x_B, y_B réels.
On a A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) Or $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
$z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B + iy_B - x_A - iy_A = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$.
$|z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$.

<u>Exemple :</u>
A d'affixe $2 - 3i$ et B d'affixe $-1 + 2i$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = -1 + 2i - (2 - 3i) = -3 + 5i$. Donc $AB = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

<u>Propriété : Module et conjugué.</u>

$$\mathbf{z} \times \bar{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^{\mathbf{2}}.$$

<u>Preuve :</u>
$z = a + ib$ avec a et b réels.
$\mathbf{z} \times \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{a^2 + b^2}$. Par ailleurs $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $|z|^2 = a^2 + b^2$;
Donc $\mathbf{z} \times \bar{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^{\mathbf{2}}$.

Propriétés : Module et opérations.
z, z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

1. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
2. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. $\qquad (z \neq 0)$.
3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$. $\qquad (z_2 \neq 0)$.
4. $|z^n| = |z|^n$. $\qquad (n \in \mathbb{N})$.

Preuve du 1 $^\circ$) :
$|z_1 \times z_2|^2 = (z_1 \times z_2) \times \overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times \bar{z_1} \times z_2 \times \bar{z_2} = |z_1|^2 \times |z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$.
Donc $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

Preuve du 2 $^\circ$) :
$\left|\dfrac{1}{z}\right|^2 = \dfrac{1}{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{\bar{1}}{\bar{z}} = \dfrac{1 \times 1}{z \times \bar{z}} = \dfrac{1}{|z|^2}$.
Donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

2 Le module en géométrie

Rappels :

1. A est un point donné et r un réel positif donné.
   L'ensemble des points M du plan tels que $\boldsymbol{AM = r}$ est **le cercle de centre $\boldsymbol{A}$ et de rayon $\boldsymbol{r}$**.
2. A et B deux points donnés.
   L'ensemble des points M du plan tels que $\boldsymbol{AM = MB}$ est **la médiatrice du segment $[\boldsymbol{AB}]$**.

Ensemble de points avec nombres complexes.

1. M est un point du plan d'affixe z et A un point d'affixe z_A et r un réel positif.
   On a l'équivalence : $AM = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z - z_A| = r$.

   Exemple :
   Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + 2i| = 4$?
   Solution :
   Soit A le point d'affixe $1 - 2i$; On sait que $|z - 1 + 2i| = |z - (1 - 2i)| = MA$. Le problème posé s'écrit alors :
   $$MA = 4.$$
   Le lieu des points M est alors le cercle de centre A et de rayon 4.
2. M est un point du plan d'affixe z et A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B et (D) la médiatrice du segment $[AB]$.
   On a l'équivalence : $M \in (D) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z - z_A| = |z - z_B|$.

   Exemple :
   Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 1$?
   Solution :
   On sait que $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = \dfrac{|z-1|}{|z+i|}$. Donc $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dfrac{|z-1|}{|z+i|} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-1| = |z+i|$.
   Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $-i$.
   $$|z - 1| = |z + i| \qquad \Longleftrightarrow \qquad MA = MB.$$
   L'ensemble des points M du plan est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

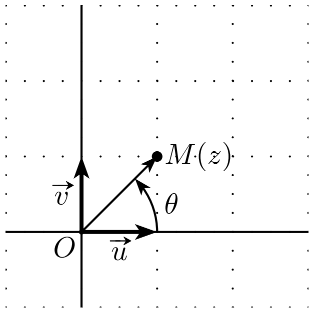
3 Argument d'un nombre complexe non nul.

Définition d'un argument.

z est un nombre complexe **non nul** et M est le point image associé à z. Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On appelle ***argument de*** z, un nombre complexe **non nul** , une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cette mesure est exprimé en général en radians.

Un nombre complexe, non nul, a une infinité d'arguments tous définis ***modulo*** $\boldsymbol{2\pi}$.



Le repère du plan complexe est $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
M est d'affixe $1+i$. On a donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Le nombre complexe $1+i$ a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ mais aussi $\dfrac{9\pi}{4}$ ou encore $\dfrac{-7\pi}{4}$ et une infinité d'autres arguments de la forme $\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

On peut écrire $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

Comment calculer un argument.

z est un nombre complexe **non nul** tel que $z = a + ib$ avec a et b réels.

On note θ un des arguments de z. On calcule :

1. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{Im(z)}{|z|} \end{array} \right.$

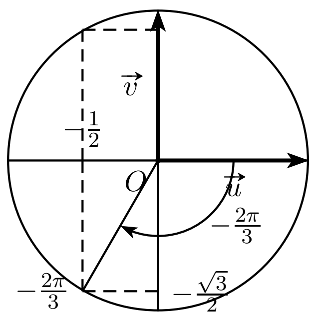
Exemple :

Déterminer un argument de $z = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Solution :

1. $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$.
2. $\left\{ \begin{array}{lllllll} \cos(\theta) & = & \dfrac{Re(z)}{|z|} & = & \dfrac{-2}{4} & = & -\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{Im(z)}{|z|} & = & \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$

   Avec l'aide du cercle trigonométrique ci-contre et les valeurs remarquables, on a : $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.



Donc un argument de z est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice :

Déterminer un argument de $z = \sqrt{3} - i$.

Propriétés d'un argument.

1. $z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg(z) = 0 \quad [2\pi]$.
2. $z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg(z) = \pi \quad [2\pi]$.
3. z est imaginaire pur $\iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
4. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
5. $z_1 = z_2 \iff \left\{ \begin{array}{c} |z_1| = |z_2| \\ \text{et} \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \quad [2\pi]. \end{array} \right.$

Écriture trigonométrique d'un nombre complexe.

Tout nombre complexe non nul, z, peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où r est le module de z et θ est un argument de z.

On peut écrire aussi z sous la forme $z = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)))$.

Exemple :

1. Si $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ alors $z = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ donc $z = 1 + i\sqrt{3}$ qui est l'écriture algébrique d'un nombre complexe.
2. Réciproquement : Si $z = 1 - i$ alors $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; puis $\left\{ \begin{array}{c} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}. \end{array} \right.$ Avec le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables, on déduit $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

   Donc $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

Justification de cette écriture trigonométrique

Avec les deux relations $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$ on peut remplacer $|z|$ par r et avec le produit en croix, on obtient : $Re(z) = r \times \cos(\theta)$ et $Im(z) = r \times \sin(\theta)$ et donc on a

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r \times \cos(\theta) + i \times r \times \sin(\theta) = Re(z) + iIm(z) = a + ib$ avec a et b réels, ce qui est l'écriture algèbrique d'un nombre complexe.

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Déterminer la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Déterminer la forme algebrique de $z = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$.

4 Arguments et opérations

Propriété fondamentale.
Pour tout nombre complexe non nul, z_1 et z_2, on a $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$.

Démonstration :
$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$.
$z_1z_2 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \times r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$
$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$
$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)cos(\theta_2))$
$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))$. Ceci est la forme trigonométrique du nombre complexe z_1z_2.
Donc $r_1r_2 = |z_1z_2|$ et $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
La démonstration utilise le résultat de la trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Propriétés déduites

1. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
2. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$.
3. $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

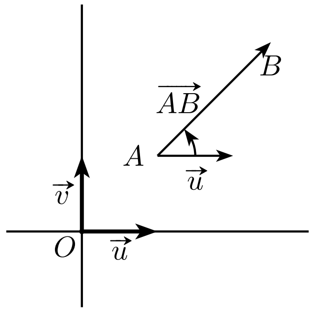
preuves :

1. On pose $z_1 = z$ et $z_2 = \frac{1}{z}$. On obtient d'une part :
   $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0[2\pi]$
   et d'autre part :
   $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)$.
   En utilisant la propriété fondamentale on a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg(z) = 0 \quad [2\pi]$; ce qui donne le résultat énoncé.
2. On utilise la propriété fondamentale avec les deux nombres complexes z_1 et $\frac{1}{z_2}$.
   $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right) = \arg z_1 + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg(z_2)$; car $\arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2)$.
3. On peut la démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence.

5 Argument et géométrie

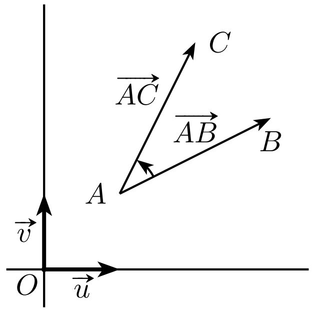
Angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$

$(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \qquad [2\pi].$



Angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \qquad [2\pi].$



preuve :

D'après la relation de Chasles
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{AC})$
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -(\vec{u};\overrightarrow{AB}) + (\vec{u};\overrightarrow{AC})$
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \qquad [2\pi].$

Propriété : droites parallèles

$(AB) \parallel (CD) \iff \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ vaut 0 ou π $[2\pi]$ $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel .

Propriété : droites perpendiculaires

$(AB)\perp(CD) \iff \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur .

Application géométrique

1. Soient $z_A = 3 + i \quad z_B = 5 + 5i \quad z_C = -3 + i \quad z_D = -4 - i$. Montrer que $(AB) \parallel (CD)$.
2. Soient $z_A = 2 + i \quad z_B = 3 - i \quad z_C = -3 + i \quad z_D = 1 + 3i$. Montrer que $(AB)\perp(CD)$.
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \;\text{ et }\; z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

   (a) Calculer les distances AB et AC.
   (b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.

6 Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition : Ecriture exponentielle

On note $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\mathrm{e}^{i\theta}$.
Tout nombre complexe z, non nul, peut s'écrire sous la forme $r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$.
Cette écriture s'appelle **l'écriture exponentielle de** z.

Exemple : Le nombre complexe $z = i$ peut s'écrire sous les trois formes :

1. l'écriture algébrique : $z = i$.
2. l'écriture trigonométrique : $z = \cos(\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(\dfrac{\pi}{2})$.
3. l'écriture exponentielle : $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.

Remarque :

Le nombre complexe $z = -2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ peut s'écrire sous les trois formes :

1. l'écriture algébrique : $z = -2(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}) = -2(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ donc $\underline{z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$.
2. l'écriture trigonométrique : $|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$; donc
$$\left\{\begin{array}{c} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$
On déduit que $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$. Donc $\underline{z = 2(\cos(\dfrac{5\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{5\pi}{4}))}$.
3. l'écriture exponentielle : $\underline{z = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}}$ car le module de z est 2 et un de ces arguments est $\dfrac{5\pi}{4}$.

Dans cet exemple, l'écriture donnée au départ, n'est pas l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe car celle-ci doit être de la forme $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$.

Propriétés : Ecriture exponentielle

1. $r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} \times r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} = r_1 \times r_2 \times \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. $\dfrac{r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
3. $\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$.
4. $\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = r^n \times \mathrm{e}^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Applications de la forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Calcul de $(1-i)^{12}$:
Déterminer la forme exponentielle de $1 - i$. En déduire la forme exponentielle de $(1-i)^{12}$.
Conclure.
2. Soints $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_1 = \sqrt{3} + i$. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.
En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
Conclure sur la valeur exacte de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$.